（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	望月 厚志
論文題目	On the Casson-Walker invariant of 3-manifolds with genus one open book decompositions （種数 1 の開本分解を持つ 3 次元多様体の Casson-Walker 不変量について）		

（論文内容の要旨）

３次元多様体の構成方法として、手術表示やHeegaard分解や開本分解などの構成方法が知られている。円周の排反和を３次元球面に埋め込んだ像を絡み目という。３次元球面から絡み目のチューブ近傍を除いてソリッドトーラスを貼り付けることにより任意の有向閉３次元多様体が構成されることが知られており、このときのソリッドトーラスの貼り付け方は絡み目の枠によって指定される。この枠付き絡み目をその３次元多様体の手術表示という。また、任意の有向閉３次元多様体は２つのハンドル体を貼り合わせることによって構成されることが知られており、その貼り合わせ方は閉曲面の自己同相写像によって指定される。この構成方法をその３次元多様体のHeegaard分解という。また、任意の有向閉３次元多様体は境界付き曲面の自己同相写像の写像トーラスにソリッドトーラスを貼り付けることにより構成されることが知られており、この構成はその境界付き曲面の自己同相写像によって指定される。この構成方法をその３次元多様体の開本分解という。また、３次元多様体の不変量として、Casson-Walker不変量という不変量が知られている。厳密には、Casson-Walker不変量は有理ホモロジー球面（１次ベッチ数が０の３次元多様体）に対して定義され、これをすべての有向閉３次元多様体に対して拡張した不変量はCasson-Walker-Lescop不変量とよばれるが、１次ベッチ数が正の３次元多様体に対するCasson-Walker-Lescop不変量は比較的簡単な不変量を用いて表示できることが知られているので、ここではそれらも含めてCasson-Walker不変量とよぶことにする。Casson-Walker不変量は、LMO不変量とよばれる不変量の１次の項を用いて表示できることが知られている。

本論文において申請者は、種数１の開本分解をもつ３次元多様体のCasson-Walker不変量について研究した。その開本分解は、種数１の境界付き曲面の自己同相写像により定められる。申請者は、種数１の開本分解をもつ３次元多様体は円環鎖状の絡み目を手術表示としてもつことを示し、この円環鎖状の絡み目の言葉でその３次元多様体のCasson-Walker不変量を記述した（前半の主定理）。さらに、申請者は、その種数１の境界付き曲面の写像類群の中心拡大の表現を具体的に構成し、その表現の言葉でその３次元多様体のCasson-Walker不変量を記述した（後半の主定理）。前半の主定理は次のように示される。求める３次元多様体のCasson-Walker不変量はLMO不変量の１次の項であるが、そのLMO不変量はその円環鎖状の絡み目のKontsevich不変量から計算することができる。円環鎖状の絡み目はクラスプとよばれるタングルに分解することができるが、クラスプのKontsevich不変量を合成することにより、円環鎖状の絡み目のKontsevich不変量を求めることができて、求める３次元多様体のCasson-Walker不変量が得られて、前半の主定理が示される。後半の主定理は次のように示される。写像類群の中心拡大はタングルの同値類によって構成されることが知られている。クラスプのKontsevich不変量を展開した各項を基底ベクトルとするベクトル空間を考え、写像類と対応するタングルのKontsevich不変量をこれに合成することにより、このベクトル空間上の表現が得られ、後半の主定理が示される。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

本論文の主題であるCasson-Walker不変量は、最初は1980年代にCassonにより３次元整ホモロジー球面の不変量として導入され、その後Walkerにより３次元有理ホモロジー球面の不変量の拡張され、さらにLescopにより有向閉３次元多様体の不変量に拡張された。Cassonによる最初の定義では、３次元整ホモロジー球面の基本群の既約SU(2)表現の共役類の個数を符号付きで数えることによりこの不変量が定義されている。一方、1980年代に低次元トポロジーと数理物理が交流して、３次元多様体の「量子不変量」とよばれる大量の不変量が発見された。Casson-Walker不変量との関連について、ホモロジー球面に対して、１のｐ乗根における量子不変量の展開の１次の項にCasson-Walker不変量の mod p が現れることが知られている。さらに、その後、ホモロジー球面に対して、量子不変量はLMO不変量という１つの不変量に統一されることが明らかになった。前述のように、Casson-Walker不変量はLMO不変量の１次の項と同等であることが知られている。また、整ホモロジー球面に対して、LMO不変量を展開した各項は有限型不変量であることが知られており、とくに、Casson不変量は１次の有限型不変量である。また、Heegaard分解で表されたホモロジー球面のCasson不変量は写像類群のJohnson準同型を用いて表示できることが知られている。このように、Casson-Walker不変量はトポロジーの様々なトピックと関連する基本的で重要な不変量である。

本論文において、申請者は、種数１の開本分解をもつ３次元多様体のCasson-Walker不変量について研究している。Heegaard分解において、種数１のHeegaard分解をもつ３次元多様体はレンズ空間であった。手術表示の観点から言うと、レンズ空間は直線的な鎖状の絡み目で手術表示され、種数１の開本分解をもつ３次元多様体は円環鎖状の絡み目で手術表示される。レンズ空間のCasson-Walker不変量はDedekind和とよばれる基本的で有用な関数であることをふまえると、本論文で求められている種数１の開本分解をもつ３次元多様体のCasson-Walker不変量も、これからさらに研究されるべき良い関数であることが期待され、本論文でその具体的な表示が求められていることには意義があるとおもわれる。また、本論文では、種数１の境界付き曲面の写像類群の中心拡大の表現の言葉で問題の不変量が記述されている。上述のように、Heegaard分解されたホモロジー球面のCasson不変量は写像類群の表現を用いて表示できることが知られているが、本論文で求めている表現はその表現と関連していることが期待される。写像類群の表現を用いて有限型不変量が表示されている場合、写像類群の中心降下列の高次の部分でその表現は自明になっていることが多い。上述の両者の表現は、そのような共通の性質をみたす表現として、関連付けされることが期待され、その方向での今後の発展も期待される。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成３１年１月４日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：即日